УДК 519.62

О. Б. Квон, В. Г. Пименов

НЕЯВНЫЕ МЕТОДЫ ТИПА РУНГЕ–КУТТА ДЛЯ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ*

1. Введение

Рассмотрим систему с ограниченным последействием общего вида, называемую также функционально-дифференциальным уравнением (ФДУ),

$$\dot{x} = f(t, x(t), x_t(\cdot)) \tag{1.1}$$

с начальными условиями

$$x(t_0) = x_0, \tag{1.2}$$

$$x_{t_0}(\cdot) = \{y^0(s),\ -\tau \le s < 0\}. \tag{1.3}$$

Здесь $x_t(\cdot) = \{x(t+s),\ -\tau \le s < 0\}$ — отрезок функции-предыстории фазового вектора к моменту t; $f : [t_0, t_0+\theta] \times \mathbb{R}^\ell \times Q[-\tau, 0) \to \mathbb{R}^\ell$; $\theta > 0$ — величина временного интервала; $\tau > 0$ — величина интервала запаздывания; $\mathbb{R}^\ell$ — ℓ-мерное евклидово пространство со скалярным произведением $< \cdot, \cdot >$ и нормой $\|\cdot\| =< \cdot, \cdot >^{1/2}$; $Q[-\tau, 0)$ — пространство ℓ-мерных кусочно-непрерывных на $[-\tau, 0)$ функций $y(\cdot)$ (непрерывных справа в точках разрыва) с нормой $\|y(\cdot)\|_Q = \sup\{\|y(s)\| :\ -\tau \le s < 0\}$.

В дальнейшем будем предполагать, что отображение $f(t, x, y(\cdot))$ является *непрерывным по сдвигу* [1, с.46] в области определения и для всех $t \in [t_0, t_0+\theta]$; $x^{(1)}, x^{(2)} \in \mathbb{R}^\ell$; $y^{(1)}(\cdot), y^{(2)}(\cdot) \in Q[-\tau, 0)$ выполняется условие Липшица

$$\begin{aligned} &\|f(t, x^{(1)}, y^{(1)}(\cdot)) - f(t, x^{(2)}, y^{(2)}(\cdot))\| \le \\ &\le L_x\|x^{(1)} - x^{(2)}\| + L_y\|y^{(1)}(\cdot) - y^{(2)}(\cdot)\|_Q. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Эти условия гарантируют существование и единственность кусочно-гладкого решения задачи Коши (1.1)–(1.3) на интервале $[t_0, t_0+\theta]$ [1, с.73].

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант №98-01-00363).

Численные методы для ФДУ изучались во многих работах, см., например, обзоры [2]–[4]. В настоящей статье разделение конечномерной и бесконечномерной фазовых составляющих в системе (1.1) позволило построить для ФДУ методы решения, являющиеся прямыми аналогами неявных методов Рунге–Кутта (НРК) для обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). НРК-методы для решения ОДУ имеют значительные преимущества в точности [5], при решений жестких задач [3],[6], при распараллеливании вычислений [7]. Аналогичными свойствами обладают и рассматриваемые ниже методы для решения ФДУ.

Работа продолжает исследования [8],[9].

2. Описание методов

Зададим на $[t_0, \theta]$ временную сетку $t_n = t_0 + n\Delta$, $n = 0, 1, \ldots, N$, с равномерным шагом $\Delta = \theta/N$. Для простоты будем считать, что $\tau/\Delta = N_\tau$ — целое число. Введем *дискретную численную модель* системы (1.1), обозначив приближение решения $x(t_n) = x_n$ в точке t_n через $u_n \in \mathbb{R}^\ell$.

Специфика системы (1.1) состоит, во-первых, в том, что адекватная ей дискретная модель должна при построении учитывать в момент t_n *предысторию дискретной модели*, т.е. множество $\{u_i\}_n = \{u_i,\ i = n - N_\tau, \ldots, n\}$.

Зададим начальную предысторию модели

$$u_i = y^0(t_0 - t_i),\ i = -N_\tau, \ldots, -1, \tag{2.1}$$

$$u_0 = x_0. \tag{2.2}$$

Во-вторых, чтобы определить формулу продвижения дискретной модели на шаг, необходимо в момент t_n произвести *интерполяцию* значений u_i, $i = n - N_\tau, \ldots, n$ между точками разбиения.

В-третьих, специфика методов типа Рунге–Кутта, как явных [8],[9], так и неявных, требует произвести в момент t_n *экстраполяцию* модели за точку t_n.

Пусть $c > 0$. Будем говорить, что на множестве дискретных предысторий модели $\{u_i\}_n$ задан *оператор интерполяции и экстраполяции* I, если

$$I(\{u_i\}_n) = u(\cdot) \in Q[t_n - \tau, t_n + c\Delta). \tag{2.3}$$

В дальнейшем будем предполагать, что:

1. Оператор I *согласован*, т.е.

$$u(t_i) = u_i,\ i = n - N_\tau, \ldots, n. \tag{2.4}$$

2. Оператор I *удовлетворяет условию Липшица*, т.е. найдется константа L_I такая, что для всяких двух наборов дискретных предысторий $\{u_i^1\}_n$ и $\{u_i^2\}_n$ и для всех $t \in [t_n - \tau, t_n + c\Delta)$ выполняется

$$\|u^1(t) - u^2(t)\| \leq L_I \max_{n-N_\tau \leq i \leq n} \|u_i^1 - u_i^2\|, \tag{2.5}$$

где $u^1(\cdot) = I(\{u_i^1\}_n)$, $u^2(\cdot) = I(\{u_i^2\}_n)$.

Будем говорить, что *оператор интерполяции и экстраполяции I имеет порядок p на некотором множестве функций $X \subseteq Q[t_n - \tau, t_n + c\Delta)$*, если найдется константа C_I такая, что для всяких $x(\cdot) \in X$ и $t \in [t_n - \tau, t_n + c\Delta)$ выполняется

$$\|x(t) - \tilde{x}(t)\| \leq C_I \Delta^p, \tag{2.6}$$

где $\tilde{x}(\cdot) = I(\{x_i\}_n)$, $x_i = x(t_i), i = n - N_\tau, \ldots, n$.

Так, оператор кусочно-постоянной интерполяции и экстраполяции $I : \{u_i\}_n \to u(\cdot)$

$$u(t) = \begin{cases} u_i, \ t \in [t_i, t_{i+1}), \ i = n - N_\tau, \ldots, n-1, \\ u_n, \ t \in [t_n, t_n + c\Delta) \end{cases}$$

согласован, удовлетворяет условию Липшица с $L_I = 1$ и на множестве липшицевых функций $x(t)$ имеет первый порядок. Примеры операторов интерполяции и экстраполяции более высокого порядка приведены в [8],[9].

Неявным k-этапным методом типа Рунге–Кутта (НРК) назовем дискретную модель вида

$$u_{n+1} = u_n + \Delta\Psi(t_n, u(\cdot)), \quad n = 1, \ldots, N-1, \tag{2.7}$$

$$\Psi(t_n, u(\cdot)) = \sum_{i=1}^{k} b_i \, h_i, \tag{2.8}$$

$$h_i = h_i(u(\cdot)) = f(t_n + c_i\Delta, u_n + \Delta \sum_{j=1}^{k} a_{ij} h_j, u_{t_n + c_i\Delta}(\cdot)), \tag{2.9}$$

$$|c_i| \leq c, \ i = 1, \ldots, k.$$

Коэффициенты метода удобно задавать таблицей Бутчера

$$\begin{array}{c|cccc} c_1 & a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1k} \\ c_2 & a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2k} \\ . & . & . & \ldots & . \\ c_k & a_{k1} & a_{k2} & \ldots & a_{kk} \\ \hline & b_1 & b_2 & \ldots & b_k \end{array}$$

Теорема 2.1. *Пусть*

$$\Delta < \frac{1}{kaL_x}, \ a = \max_{i,j} |a_{ij}|. \tag{2.10}$$

Тогда существует единственное решение $H = (h_1, h_2, \ldots, h_k)'$ *системы уравнений* (2.9), *причем функционалы* $h_1, h_2, \ldots, h_k$, *а также* Ψ *липшицевы по* $u(\cdot)$.

Доказательство. Существование и единственность решения системы (2.9) доказывается с помощью итераций

$$h_i^{s+1} = f(t_n + c_i\Delta, u_n + \Delta \sum_{j=1}^{k} a_{ij} h_j^s, u_{t_n + c_i\Delta}(\cdot))$$

аналогично [5, с.215].

Докажем липшицевость h_i. Пусть $u^1(\cdot) \in Q[t_n - \tau, t_n + c\Delta)$, $u^2(\cdot) \in Q[t_n - \tau, t_n + c\Delta)$, $u_n^1 = u^1(t_n)$, $u_n^2 = u^2(t_n)$,

$$h_i^1 = f(t_n + c_i\Delta, u_n^1 + \Delta \sum_{j=1}^{k} a_{ij} h_j^1, u^1_{t_n + c_i\Delta}(\cdot)),$$

$$h_i^2 = f(t_n + c_i\Delta, u_n^2 + \Delta \sum_{j=1}^{k} a_{ij} h_j^2, u^2_{t_n + c_i\Delta}(\cdot)),$$

тогда

$$\|h_i^1 - h_i^2\| \le$$

$$\le L_x(\|u_n^1 - u_n^2\| + a\Delta \sum_{j=1}^{k} \|h_i^1 - h_i^2\|) + L_y \sup_{-\tau \le s < 0} \|u^1_{t_n + c_i\Delta}(s) - u^2_{t_n + c_i\Delta}(s)\| \le$$

$$\le a\Delta L_x \sum_{j=1}^{k} \|h_i^1 - h_i^2\| + (L_x + L_y) \sup_{t_n - \tau \le t < t_n + c\Delta} \|u^1(t) - u^2(t)\|.$$

В векторном пространстве $R^{k\ell}$ для вектора $H = (h_1, h_2, \ldots, h_k)'$ введем норму $\|H\| = \sup_i \|h_i\|$, тогда для разности $H^1 = (h_1^1, h_2^1, \ldots, h_k^1)'$ и $H^2 = (h_1^2, h_2^2, \ldots, h_k^2)'$ справедливо

$$\|H^1 - H^2\| \le ak\Delta L_x \|H^1 - H^2\| + (L_x + L_y) \sup_{t_n - \tau \le t < t_n + c\Delta} \|u^1(t) - u^2(t)\|,$$

откуда

$$\|h_i^1 - h_i^2\| \le \|H^1 - H^2\| \le \frac{L_x + L_y}{1 - ak\Delta L_x} \sup_{t_n - \tau \le t < t_n + c\Delta} \|u^1(t) - u^2(t)\|. \tag{2.11}$$

Константа
$$L_H = \frac{L_x + L_y}{1 - ak\Delta L_x}$$
положительна в силу условия (2.10).

Из (2.11) и определения функции Ψ (2.8) вытекает липшицевость Ψ по $u(\cdot)$ с константой Липшица $L_\Psi = L_H kb$, $b = \max_i |b_i|$, т.е.
$$\|\Psi(t_n, u^1(\cdot)) - \Psi(t_n, u^2(\cdot))\| \le L_\Psi \sup_{t_n - \tau \le t < t_n + c\Delta} \|u^1(t) - u^2(t)\|. \qquad (2.12)$$

Следствие. *Если оператор интерполяции и экстраполяции I задан, то функция $\Phi(\{u_i\}_n) = \Psi(t_n, I(\{u_i\}_n))$ липшицева по дискретной предыстории модели, т.е. найдется такая константа L_Φ, что*
$$\|\Phi(\{u_i^1\}_n) - \Phi(\{u_i^2\}_n)\| \le L_\Phi \max_{n - N_\tau \le i \le n} \|u_i^1 - u_i^2\|. \qquad (2.13)$$

Неравенство (2.13) вытекает из (2.12) и (2.5), причем $L_\Phi = L_\Psi L_I$.

3. Порядок сходимости

Пусть $x_n = x(t_n)$ $(n = 0, 1, \ldots, N)$ — значения точного решения $x(t)$ задачи (1.1)–(1.3) в узлах t_n. *Невязкой* НРК-метода на $x(t)$ в узлах t_n назовем функционалы
$$g_n(x(\cdot)) = \frac{x_{n+1} - x_n}{\Delta} - \Psi(t_n, x(\cdot)), \qquad (3.1)$$
где
$$\Psi(t_n, x(\cdot)) = \sum_{i=1}^{k} b_i\, h_i = f(t_n + c_i\Delta, x_n + \Delta \sum_{j=1}^{k} a_{ij} h_j, x_{t_n + c_i\Delta}(\cdot)).$$

В ОДУ порядок невязки определяется обычно на некотором классе задач, например, на классе достаточно гладких задач. В ФДУ задача (1.1)–(1.3) задается тройкой (f, x_0, y^0), т.е. функционалом правой части системы (1.1), конечномерной x_0 и бесконечномерной y^0 составляющими в начальных условиях. Пусть $F = \{(f, x_0, y^0)\}$ — некоторое подмножество (класс задач) таких троек, которые удовлетворяют указанным в разделе 1 условиям, и пусть $X(F)$ — соответствующее множество решений $x(t)$ задач (1.1)–(1.3).

Будем говорить, что НРК-метод *имеет порядок аппроксимации (невязки) p на классе задач F*, если для всякого $x(\cdot) \in X(F)$ найдется константа $C_{x(\cdot)}$ такая, что

$$\|g_n(x(\cdot))\| \leq C_{x(\cdot)}\Delta^p, \quad n = 0, \ldots, N-1. \tag{3.2}$$

Будем говорить, что НРК-метод (2.7)–(2.9), (2.3) для задачи (1.1)–(1.3) *сходится*, если $x_n - u_n \to 0$ при $\Delta \to 0$ для всех $n = 0, 1, \ldots, N$, и метод *сходится с порядком p*, если найдется такая константа C_u, что

$$\|x_n - u_n\| \leq C_u\Delta^p, \quad n = 0, 1, \ldots, N. \tag{3.3}$$

В ОДУ порядок сходимости НРК-метода определяется лишь порядком аппроксимации, в ФДУ порядок сходимости НРК-метода зависит также от порядка оператора интерполяции и экстраполяции, а именно справедлива

Теорема 3.1. *Пусть на классе задач F НРК-метод имеет порядок аппроксимации $p > 0$ и на множестве $X(F)$ оператор интерполяции и экстраполяции I имеет порядок p, тогда для $x(\cdot) \in X(F)$ НРК-метод* (2.7)–(2.9), (2.3) *сходится с порядком p и имеет место оценка*

$$\|x_n - u_n\| \leq (C_{x(\cdot)} + L_\Psi C_I)e^{(L_\Phi+1)\theta}\Delta^p, \quad n = 0, 1, \ldots, N. \tag{3.4}$$

Доказательство. Обозначим $\delta_n = u_n - x_n$, тогда из (2.1)–(2.2) следует $\delta_n = 0$ для $n = -N_\tau, \ldots, 0$. Для $n = 0, \ldots, N-1$ имеем

$$\delta_{n+1} = \delta_n + \Delta[\Psi(t_n, I(\{u_i\}_n)) - \Psi(t_n, I(\{x_i\}_n))] +$$
$$+[x_n - x_{n+1} + \Delta\Psi(t_n, x(\cdot))] + \Delta[\Psi(t_n, I(\{x_i\}_n)) - \Psi(t_n, x(\cdot))].$$

Используя для функции $\Phi(\{u_i\}_n) = \Psi(t_n, I(\{u_i\}_n))$ свойство (2.13), учитывая (3.2), а также (2.12) и (2.6), имеем

$$\|\delta_{n+1}\| \leq \|\delta_n\| + \Delta L_\Phi \max_{n-N_\tau \leq i \leq n} \|\delta_i\| + C_{x(\cdot)}\Delta^{p+1} + L_\Psi C_I\Delta^{p+1}. \tag{3.5}$$

Индукцией по n докажем оценку

$$\|\delta_n\| \leq (1 + \Delta(L_\Phi + 1))^n(C_{x(\cdot)} + L_\Psi C_I)\Delta^p, \quad n = 0, \ldots, N. \tag{3.6}$$

База индукции выполняется в силу $\delta_0 = 0$.

Шаг индукции. Предположим, что оценка (3.6) верна для всех индексов $\leq n$. Докажем ее для $n+1$.

В силу (3.5) и индуктивного предположения,

$$\|\delta_{n+1}\| \le (1+\Delta(L_\Phi+1))^n(C_{x(\cdot)}+L_\Psi C_I)\Delta^p +$$
$$+\Delta L_\Phi(1+\Delta(L_\Phi+1))^{n_0}(C_{x(\cdot)}+L_\Psi C_I)\Delta^p+(C_{x(\cdot)}+L_\Psi C_I)\Delta^{p+1},$$

где $n_0 \le n$ — тот индекс, на котором достигается $\max\limits_{n-N_\tau\le i\le n}\|\delta_i\|$. Тогда

$$\|\delta_{n+1}\| \le (1+\Delta(L_\varphi+1))^n(1+\Delta L_\varphi+\Delta)(C_{x(\cdot)}+L_\psi C_I)\Delta^p,$$

т.е. получаем оценку (3.6) для $n+1$.

Из (3.6) вытекает оценка (3.4).

4. Порядок аппроксимации

Условия, определяющие порядок аппроксимации, получаются разложением в ряд Тейлора точного решения $x(t)$ и функционала $\psi(t_n, x(\cdot)) = \sum\limits_{i=1}^{k} b_i h_i$ в окрестности точки t_n и приравниванием соответствующих членов. При этом для разложения функционалов вдоль решения можно использовать технику i-гладкого анализа [1]. Продемонстрируем это на примере одноэтапных ($k=1$) НРК-методов.

Невязка определяется как

$$g_n(x(\cdot)) = \frac{x_{n+1}-x_n}{\Delta} - b_1 h_1, \tag{4.1}$$

где $h_1 = f(t_n+c_1\Delta, x_n+\Delta a_{11}h_1, x_{t_n+c_1\Delta}(\cdot))$.

При условии достаточной гладкости функции $x(t)$ выполняется

$$x(t) = x_n + \dot{x}(t_n)\Delta + \frac{\ddot{x}(t_n)}{2}\Delta^2 + O_1(\Delta^3),$$

$$\dot{x}(t_n) = f(t_n, x_n, x_{t_n}(\cdot)) = f_n, \quad \ddot{x}(t_n) = \partial_t f + \frac{\partial f}{\partial x} f_n,$$

где $\partial_t f = \partial_t f(t_n, x_n, x_{t_n}(\cdot))$ — коинвариантная производная функционала f [1, с.41], $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial x}(t_n, x_n, x_{t_n}(\cdot))$ — матрица из частных производных $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$, $i,j = 1,\ldots,n$ (предполагается, что эти производные существуют и непрерывны).

Аналогично

$$h_1 = f(t_n+c_1\Delta, x_n+\Delta a_{11}h_1, u_{t_n+c_1\Delta}(\cdot)) =$$

$$= f_n + \partial_t f c_1 \Delta + \frac{\partial f}{\partial x} \Delta a_{11} [f_n + O_2(\Delta)] + O_3(\Delta^2).$$

Подставляя эти разложения в (4.1), имеем

$$g_n(x(\cdot)) = f_n[1 - b_1] + \partial_t f[\frac{1}{2} - b_1 c_1]\Delta + \frac{\partial f}{\partial x} f_n [\frac{1}{2} - b_1 a_{11}]\Delta + O(\Delta^2).$$

Таким образом, одноэтапный НРК-метод будет иметь первый порядок, если $b_1 = 1$, и второй, если, кроме того, $c_1 = \frac{1}{2}$, $a_{11} = \frac{1}{2}$. Получаем неявное правило средней точки с таблицей Бутчера:

$$\begin{array}{c|c} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \hline & 1 \end{array}$$

Особенность НРК-методов (2.7)–(2.9) состоит в том, что они являются полными аналогами соответствующих методов для ОДУ в смысле совпадения порядка аппроксимации методов для гладких задач ОДУ и ФДУ с одинаковыми таблицами Бутчера.

Рассмотрим систему ОДУ

$$\dot{x} = f^*(t, x), \quad x(t_0) = x_0, \tag{4.2}$$

где $t \in [t_0, t_0 + \theta]$; $x \in \mathbb{R}^\ell$.

Опишем для (4.2) НРК-метод [3],[5]. Пусть $\Delta = \dfrac{\theta}{N}$, $t_i = t_0 + i\Delta$, $i = 0, \ldots, N$. Тогда приближение решения задачи (4.2) строится по формулам:

$$u_0 = x_0, \quad u_{n+1} = u_n + \Delta \sum_{i=1}^{k} b_i h_i, \tag{4.3}$$

$$h_i^* = f^*(t_n + c_i\Delta, u_n + \Delta \sum_{j=1}^{k} a_{ij} h_i^*).$$

Будем говорить [5, с.139], что метод (4.3) для ОДУ *имеет порядок аппроксимации p*, если для достаточно гладких задач (т.е. для p раз непрерывно дифференцируемой функции $f^*(t, x)$ на $[t_0, t_0+\theta] \times \mathbb{R}^\ell$) выполняется

$$\|g_n(x_n)\| \le C_g \Delta^p,$$

где

$$g_n(x) = \frac{x_{n+1}^* - x_n^*}{\Delta} - \sum_{i=1}^{k} b_i h_i, \quad h_i^* = f^*(t_n + c_i\Delta, x_n^* + \Delta \sum_{j=1}^{k} a_{ij} h_j^*),$$

а $x^*(t)$ — точное решение задачи (4.2).

Для определения порядка аппроксимации в ОДУ создана специальная техника [5], позволяющая получать условия порядка и строить НРК-методы высокого порядка. Покажем, что те же условия порядка применимы и для НРК-методов в ФДУ.

Условие 4.1. *Множество задач $F = \{f, x_0, y_0\}$ таково, что для всякого решения $x(t)$ из множества $X(F)$ функция $f^*(t,x) = f(t,x,x_t(s))$ p раз непрерывно дифференцируема на $[t_0, t_0+\theta] \times \mathbb{R}^\ell$.*

Из совпадения определений порядка аппроксимации для ОДУ и ФДУ на классе задач F вытекает

Теорема 4.1. *Пусть выполняется условие* 4.1. *Тогда если метод* (4.3) *для ОДУ имеет порядок аппроксимации p, то и метод* (2.7)–(2.9) *для ФДУ с теми же коэффициентами (т.е. с той же матрицей Бутчера) имеет порядок аппроксимации p на классе задач F.*

Используя понятия i-гладкого анализа, можно получать эффективно проверяемые условия, обеспечивающие условие 4.1 для различных p.

Например, пусть F — класс задач, удовлетворяющих условиям:

1) отображение $f(t,x,y)$ коинвариантно непрерывно дифференцируемо на $[t_0, t_0+\theta] \times \mathbb{R}^\ell \times C[-\tau, 0)$, где $C[-\tau, 0)$ — множество непрерывных на $[-\tau, 0)$ ℓ-мерных вектор-функций;

2) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(t,x,y)$ непрерывна на $[t_0, t_0+\theta] \times \mathbb{R}^\ell \times C[-\tau, 0)$;

3) выполняется условие склейки

$$f(t_0, x_0, y_0(\cdot)) = \dot{y}_0(\cdot).$$

Эти условия обеспечивают [1] выполнение условия 4.1 при $p = 1$.

Факт совпадения порядков аппроксимации НРК-методов для ФДУ и ОДУ дает способ построения эффективных численных методов решения ФДУ, в частности, для решения жестких систем ФДУ.

5. Возможности для параллельных вычислений

Неявные методы Рунге–Кутта для ОДУ обладают значительными возможностями для организации параллельных вычислений. В работе [7] отмечены три основных направления распараллеливания. Все они сохраняются и для ФДУ.

1. Использование НРК-методов с матрицей Бутчера такого вида, который позволяет применять параллельно несколько процессоров для вычисления величин h_i по формулам (2.9). Например, четырехэтапный метод

$$\begin{array}{c|cccc} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & -\frac{5}{3} & \frac{4}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \hline & -1 & \frac{3}{2} & -1 & \frac{3}{2} \end{array}$$

позволяет использовать параллельно два процессора для вычисления h_1 и h_2, а затем h_3 и h_4. Более содержательные примеры приведены в [7], причем там отмечается, что преимущества параллельных вычислений проявляются именно для неявных методов Рунге–Кутта.

2. Для вычисления h_i в (2.9) необходимо решать нелинейные системы. Обычно для этого применяют метод Ньютона–Рафсона, на каждой итерации которого требуется решать линейные системы нередко большой размерности. Методы факторизации матрицы Якоби, применяемые в ОДУ для распараллеливания этих вычислений, применимы и для ФДУ.

3. Как и для обыкновенных дифференциальных уравнений, так и для ФДУ имеется возможность распараллеливания вычисления координат векторной функции $f(t_n, u_n, u_{t_n}(\cdot))$ — правой части системы (1.1), что особенно актуально, если размерность ℓ системы велика.

В ФДУ для алгоритмов НРК-методов имеется еще несколько возможностей для распараллеливания.

4. Интерполяция и экстраполяция предыстории дискретной модели проводятся параллельно по всем координатам, что существенно при $\ell > 1$.

5. Во всех конструкциях НРК-методов основные вычислительные ресурсы тратятся на подсчет функционала $f(t, x, x_t(\cdot))$ правой части системы (1.1), особенно если этот функционал содержит *распределенное* последействие. Пусть функционал f имеет вид

$$f = F(t, q_1, q_2, \ldots, q_s), \tag{5.1}$$

где $F : R^{s+1} \to \mathbb{R}^\ell$, $q_i = q_i(t, x, x_t(\cdot))$, $i = 1, \ldots, s$, — сингулярные или регулярные [1] функционалы над $R \times \mathbb{R}^\ell \times Q[-\tau, 0)$.

Основные проблемы при этом возникают в том случае, если q_i — это интегралы вида

$$q_i = \int_{-\tau}^{0} \beta_i(s, x(t), x_t(s))ds \tag{5.2}$$

или имеют еще более сложную структуру [1, с.25]. В этом случае вычисления q_i, $i = 1, \dots, s$, можно проводить параллельно. В частности, к виду (5.1)–(5.2) сводятся интегро-дифференциальные уравнения Вольтерра [2],[3], рассматриваемые на конечном промежутке времени.

6. В случае, если функционал f имеет распределенное запаздывание в виде интегралов (5.2) и подынтегральные функции $\beta_i(s, x(t), x_t(s))$ имеют сложную структуру или их вычисления трудоемки, для численного вычисления интегралов (5.2) можно использовать, например, составные квадратурные формулы с параллельным вычислением значений подынтегральных функций.

Данная работа посвящена *теоретическим* аспектам построения неявных численных методов. Некоторые *модельные* расчёты показали работоспособность и эффективность предлагаемых методов.

Литература

1. Ким А.В. i-гладкий анализ и функционально-дифференциальные уравнения. Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 1996.
2. Crier C., Tavernini L. The numerical solution of Volterra functional differential equations by Euler's method // SIAM J. Numer. Anal. 1972. Vol.9. P.105–129.
3. Hall G., Watt Y.M. Modern numerical methods for ordinary differential equations. Oxford: Clarendon Press, 1976.
4. Эльсгольц Л.Э., Норкин С.Б. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М.: Наука, 1971.
5. Хайрер Э., Нерсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежёсткие задачи. М.: Мир, 1990.
6. Hairer E., Wanner G. Solving ordinary differential equation. II. Stiff and differential algebraic problems. Berlin e.a.: Springer, 1987.
7. Iserles A., Norsett S.P. On the theory of parallel Runge–Kutta methods // IMA J. Numer. Anal. 1990. Vol.10. P.463–488.
8. Kim A.V., Pimenov V.G. Numerical methods for time-delay systems on the basis of i-smooth analysis // 15th IMACS World Congress of Scientific Computation, Modelling and Applied Mathematics. Vol.1. Berlin: Wissenschaft & Technik Verlag, 1997. P.193–196.
9. Ким А.В., Пименов В.Г. О применении i-гладкого анализа к разработке численных методов решения функционально-дифференциальных уравнений // Тр. ИММ УрО РАН. 1998. Т.5. С.104–126.

Статья поступила 11.11.1997 г.